非線型拡散方程式系による飽和生長モデル (生物モデルの数学)

亀高, 惟倫

数理解析研究所講究録
195巻 1973年 27-34

非線型拡散方程式系による
飽和成長モデル

大阪市立大 理　亀高惟倫

§1、 問題意識

形態形成に対する数学モデルを作りたいというのが大きなしかし漠然とした夢である。 以下の議論がそういう試みの第一歩であるという事さえ過激に過ぎるであろうが、試行錯誤の一つとして次の様なモデルを作った。 それはN元の非線型拡散方程式系に対する初期値問題であって、その解 u は N次元ユークリッド空間 R^N の compact set Q に留まる、

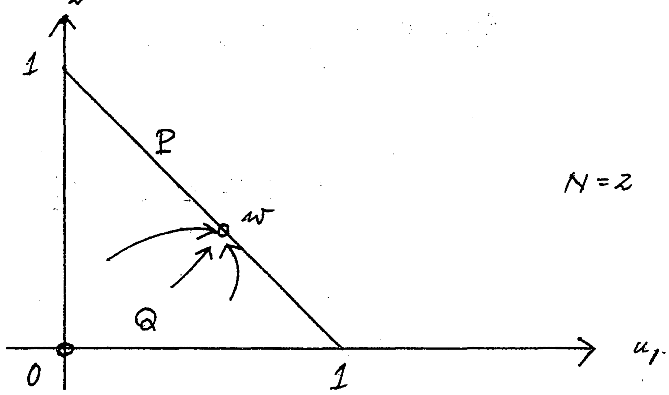
$$Q = \{ u \in R^N ;\ u = {}^t(u_1, \cdots, u_N) \quad u_j \geq 0 \ \forall j,\ \sum_{k=1}^{N} u_k \leq 1 \}$$

$u \equiv 0$ は定常解である、 $u \equiv w$ ($w \in \mathring{P}$ 定数ベクトル) も定常解である、

$$P = \{ u \in R^N ;\ u_j \geq 0 \ \forall j,\ \sum_{k=1}^{N} u_k = 1 \}$$
$$\mathring{P} = \{ u \in R^N ;\ u_j > 0 \ \forall j,\ \sum_{k=1}^{N} u_k = 1 \}$$

そして定常解 $u \equiv 0$ は不安定であって、定常解 $u \equiv w$ は安定である。 すなわち u の初期値が定常解 $u \equiv 0$ から

少しでもずれると、時間 $t \to \infty$ につれて $u \to w$ となる。結論に拡散方程式らしさが現われる事を期待したい。



§2、 問題と結論.

まず次の2つの仮定を置く。

<u>仮定1</u>

$[0,1] \ni \alpha \to f(\alpha) \in [0, f(0)]$ C^1-map

$f(1) = 0$, $f(\alpha)$: 強い意味で単調減少、($f(0) > 0$)

<u>仮定2</u>

A: 実 $N \times N$ 行列, 非対角線要素は全て非負

既約 (irreducible)

${}^tA\,1_N = 0$ $1_N = {}^t(1, \cdots, 1) \in R^N$

上の仮定より $Aw = 0$ なる $w \in \mathring{P}$ がある事がわかる。 $u = {}^t(u_1, \cdots, u_N)$, $v = {}^t(v_1, \cdots, v_N) \in R^N$ に対して

$\langle u, v\rangle = {}^t v \cdot u = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k$, $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ とする。
上の A と f に対して次の様な非線形拡散方程式系に対する初期値問題を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = \left[A + f(\langle u, 1_N\rangle)\right] u & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R^n \end{cases}$$

ただし $u = u(x,t) = {}^t(u_1(x,t), \cdots, u_N(x,t))$

$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$: Laplacian

次の定理が結論である。

定理

$u_0(x) \in Q$ $\forall x \in R^n$ なる任意の連続関数 $u_0(x)$ に対して (1) は $u(x,t) \in Q$ $(x,t) \in R^n \times [0,\infty)$ なる大域解 $u(x,t)$ を唯一つ持つ。特に $u_0(x) \not\equiv 0$ であれば $x \in R^n$ についてコンパクト一様に $u(x,t) \longrightarrow w$ $(t \to \infty)$ である。

§3、証明.

$\alpha = \alpha(x,t) = \langle u(x,t), 1_N\rangle$, $\alpha_0(x) = \langle u_0(x), 1_N\rangle$ とすると $0 \le \alpha_0(x) \le 1$ である。以後 $u_0(x) \not\equiv 0$ とする。した

がって $\alpha_0(x) \neq 0$ である。(1) の両辺に左から ${}^t\mathbf{1}_N$ をかけると

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\alpha = f(\alpha)\alpha & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \\ \alpha(x,0) = \alpha_0(x) & x \in R^n \end{cases}$$

N. Ikeda - Y. Kametaka [1] 又は K. Masuda [2] で次の事が証明されている。

命題 1

$$\alpha(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1 \qquad x \in R^n \text{ について コンパクト一様.}$$

定義

$$v = W^{-\frac{1}{2}}(u - \alpha w), \quad B = W^{-\frac{1}{2}} A W^{\frac{1}{2}}$$

ただし

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_N \end{pmatrix}, \qquad W^{\pm\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} w_1^{\pm\frac{1}{2}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_N^{\pm\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

(1), (2) より新しい未知関数 v に対して

$$(3)\quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) v = [B + f(\alpha)]\, v \qquad (x,t) \in R^n \times (0,\infty)$$

を得る。

さて非負行列の理論によって次の補題が成り立つ。

補題

B．非対角線要素が全て非負の $N\times N$ 行列，既約，

$Bb = {}^tBb = 0$ なる $b\in \mathring{P}$ がある。このとき B に対する2次形式は b の張る1次元部分空間の R^N における直交補空間上で負定値である。すなわち次のような $\delta>0$ がとれる。 ${}^tvBv \le -\delta\|v\|^2 \quad \forall v\in R^N$ s.t. $\langle v,b\rangle=0$

上の補題の証明は次の事に注意すればよい。B をその対称部分 $\frac{1}{2}(B+{}^tB)$ で置き換えて証明すればよいから最初から B は対称としてよい。B の固有値は負の実軸上の点を中心に原点を通る円の内部にある。B が既約な事から固有値 0 は単根である。したがって 0 以外の B の固有値は全て負であってそれらに対応する固有ベクトルが b の張る1次元部分空間の直交補空間を張っている。

さて(3)に登場する B は $b = W^{\frac{1}{2}}1_N$ として上の補題の仮定をみたす。又(3)の中の v もこの b に対し $\langle v,b\rangle=0$ である。したがって(3)より次の微分不等式が従う。

(4) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\|v\|^2 \le -(2\delta - 2f(x))\|v\|^2 \qquad (x,t)\in R^3\times(0,\infty)$$

$\Delta\|v\|^2 = 2\,{}^tv\cdot\Delta v + 2\sum_{k=1}^{3} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right\|^2 \ge 2\,{}^tv\cdot\Delta v$ に注意すればよい。v は u の連続関数、u はコンパクト集合 Q

を動く事に注意すれば、適当な $c>0$ に対して

定義 $\varphi = \varphi(x,t) = c\|v\|^2$

とすると、$0 \leq \varphi(x,t) \leq 1$　$(x,t) \in R^n \times (0,\infty)$ としてよい。(4) を c 倍して

$$(5)\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi \leq -(2\delta - 2f(x))\varphi & (x,t) \in R^n \times (0,\infty) \\ 0 \leq \varphi(x,t) \leq 1 & " \end{cases}$$

任意の $R>0$ に対して $B_R = \{x \in R^n ;\ |x| < R\}$ とすると、命題1、より次の様な $T_R > 0$ が取れる。

$$(5)_R\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi \leq -\delta\varphi & (x,t) \in B_R \times [T_R,\infty) \\ 0 \leq \varphi(x,t) \leq 1 & " \end{cases}$$

比較定理により次の事が成り立つ。

命題 2

$$0 \leq \varphi(x,t) \leq \varphi_R(x,t) \qquad (x,t) \in B_R \times [T_R,\infty)$$

ただし φ_R は次の $(6)_R$ の解である。

$$(6)_R\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\varphi_R = -\delta\varphi_R & (x,t) \in B_R \times (T_R,\infty) \\ \varphi_R(x,t) = 1 & (x,t) \in \partial B_R \times (T_R,\infty) \\ \varphi_R(x,T_R) = 1 & \end{cases}$$

$$(7)_R \quad \begin{cases} -\Delta \psi_R = -\delta \psi_R & x \in B_R \\ \psi_R(x) = 1 & x \in \partial B_R \end{cases}$$

の解は

$$(8)_R \qquad \psi_R(x) = \frac{|x|^{1-\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\delta}\,|x|)}{R^{1-\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\delta}\,R)}$$

である。 ただし $I_\nu(z)$ は ν 次変形 Bessel 関数であって

$$\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right] I_\nu(z) = 0$$

をみたし

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \qquad \text{as } z \to +\infty$$

$$\sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \qquad \text{as } z \to 0$$

$$I_\nu(z) > 0, \qquad z > 0$$

なる性質を持つ。

<u>命題 3.</u>

$$\varphi_R(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \psi_R(x) \qquad B_R \text{ で一様に。}$$

である。

<u>命題 4.</u>　任意の $R_0>0$ に対して

$$\psi_R(x) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad B_{R_0} \text{ で一様に、}$$

も明らかである。命題 2, 3, 4 より

<u>命題 5.</u>

$$\|v\| = \|W^{-\frac{1}{2}}(u-\alpha w)\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$x\in R^n$ についてコンパクト一様収束。

命題 1, 5 より定理の結論。

$$u(x,t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} w \qquad x\in R^n \text{ でコンパクト一様に。}$$

を得る。

参考文献

[1] N. Ikeda - Y. Kametaka ; 題未定, 未刊.

[2] K. Masuda ; On the growth of solutions of nonlinear diffusion equation $u_t = \Delta u + F(u)$ (to appear)